

ESTUDO DE PARÂMETROS GEOMÉTRICOS PARA ANÁLISE DE LAJES NERVURADAS ATRAVÉS DO MÉTODO DA ANALOGIA DE GRELHA

STUDY OF GEOMETRIC PARAMETERS FOR ANALYSIS OF NERVURED SLABS THROUGH THE GRILLAGE ANALOGY METHOD

Afonso D. Zilio¹; Alessandra Kuhn¹; Luiza L. Di Domenico¹; Rodrigo Bordignon²

¹Acadêmico do Curso Superior em Engenharia Civil, IFSUL-Passo Fundo
E-mails: afonsozilio00@gmail.com; alessandra.kuhn6@gmail.com; luiza.didomenico@gmail.com

²Professor do Curso Superior em Engenharia Civil, IFSUL-Passo Fundo
E-mail: rodbordignon@gmail.com

RESUMO

Com o propósito de simplificar a obtenção dos esforços internos e deformações em lajes nervuradas em concreto armado, um método utilizado é a analogia de grelha. Tal método caracteriza-se pela análise de elementos de barras com parâmetros de rigidezes equivalentes. Este estudo tem por objetivo propor parâmetros para ajuste do momento de inércia à torção equivalente, a fim de empregar a analogia de grelhas para análise estrutural de lajes nervuradas. Os parâmetros de ajuste foram definidos a partir da modelagem de lajes nervuradas pelo método dos elementos finitos (MEF) com relações entre lados (L_x/L_y) de 1, 1,5 e 2 e diferentes vínculos de apoio. Os dados de referência foram determinados a partir da modelagem numérica e comparados aos obtidos pelo método de analogia de grelha. A partir da análise e comparação entre os modelos, foram estabelecidos valores para os parâmetros de ajuste das propriedades geométricas. Propõe-se que o valor do momento de inércia à torção atribuído às barras da grelha, deva ser 16% do valor do momento de inércia à torção obtido a partir da seção transversal da nervura da laje. Alternativamente, o valor do momento de inércia à torção atribuído às barras da grelha, pode assumir o valor de 72% do momento de inércia a flexão da seção transversal da nervura. Estas proposições aplicam-se à todas configurações de lajes estudadas, contribuindo assim para a aplicabilidade do método de analogia de grelha na análise de lajes nervuradas.

Palavras-chave: Analogia de Grelha; Lajes Nervuradas; Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

In order to simplify the obtaining of the internal stresses and deformations in ribbed slabs in reinforced concrete, a method used is the grillage analogy. This method is characterized by the analysis of bar elements with equivalent stiffness parameters. This study aims to propose parameters for adjusting the moment of inertia to the equivalent torsion, in order to use the grillage analogy for structural analysis of ribbed slabs. The adjustment parameters were defined from the finite element method (MEF) slabs modeling with relationships between sides (L_x / L_y) of 1, 1.5 and 2 and different support links. The reference data were determined from numerical modeling, compared to those obtained by the grillage analogy method. From the analysis and comparison between the models, values were established for the adjustment parameters of the geometric properties. It is proposed that the value of the moment of inertia to the torsion attributed to the bars of the grid should be 16% of the value of the moment of inertia to the torsion obtained from the cross section of the groove of the slab. Alternatively, the value of the moment of inertia to the torsion attributed to the grillage bars may assume the value of 72% of the moment of inertia to flexure of the cross section of the groove. These propositions apply to all configurations of slabs studied, thus contributing to the applicability of the grillage analogy method in the analysis of ribbed slabs.

Keywords: Grillage Analogy; Waffle Slabs; Finite Element Method.

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas estruturais em concreto armado devem ser projetados a fim de atender aos requisitos de uso, considerando as exigências das normas técnicas vigentes. Cabe ao engenheiro projetista a tarefa de especificar os elementos capazes de suportar as solicitações impostas com o menor consumo de material, prezando por um projeto econômico e sustentável.

A utilização de lajes nervuradas em concreto armado apresenta-se como uma solução largamente empregada para vencer vãos de pavimentos. Segundo Stramandinoli (2003), as lajes nervuradas são compostas por uma série de vigas, solidarizadas entre si pela mesa, que revelam um comportamento estático intermediário entre laje maciça e grelha. Araújo (2014) salienta que as lajes nervuradas são caracterizadas pela substituição do concreto abaixo da linha neutra por um material inerte, constituindo assim um conjunto de vigas que se cruzam. Dessa forma, além de reduzir o peso próprio, há um melhor aproveitamento do aço e do concreto em relação às lajes maciças, que apresentam concreto armado em toda sua seção transversal.

Para a obtenção dos valores dos esforços internos e das deformações em lajes de concreto armado é possível empregar um método simplificado e análogo a uma grelha de vigas. Este método, conhecido como analogia de grelha, caracteriza-se pela substituição da laje plana, que é um elemento de placa, por uma malha de vigas, que são elementos de barra, com propriedades da seção transversal equivalentes.

A Norma ABNT NBR 6118:2014 em seu item 14.7.7, para a obtenção de esforços solicitantes, permite considerar as lajes nervuradas bidirecionais como lajes maciças. Apesar da possibilidade de analisar as lajes nervuradas como lajes maciças de altura equivalente, considera-se relevante a utilização de um método mais representativo para avaliar adequadamente o comportamento desses elementos, como o método de analogia de grelha. Havendo diferentes maneiras de avaliar, Montoya *et al* (1973) propuseram adotar o valor da inércia a torção (I_t) como o dobro da inércia a flexão (I_f) para análise de lajes maciças ao utilizar o método da analogia de grelha. Enquanto que Coelho (2000), indica que a relação entre as inércias à torção e à flexão varia entre dois e três, de acordo com o tipo de análise a ser realizada. Outro procedimento para análise de lajes é o Método dos Elementos Finitos (MEF), que segundo Lotti *et al* (2006), consiste na discretização de um meio contínuo em pequenos elementos, mantendo as mesmas propriedades originais.

Deste modo, este estudo tem como objetivo propor, através da aplicação do MEF, parâmetros para ajuste do valor do momento de inércia à torção equivalente empregado no método da analogia de grelha para análise estrutural de lajes nervuradas.

2. METODOLOGIA

Com a finalidade de estabelecer parâmetros geométricos para análise estrutural de lajes nervuradas, através do método da analogia de grelha, uma pesquisa fundamentada em estudos validados anteriormente foi realizada a fim de verificar as recomendações de outros autores referentes ao tema. Posteriormente, modelos computacionais foram implementados em um *software* que utiliza o Método dos Elementos Finitos.

A determinação dos parâmetros geométricos deu-se através da análise de lajes com nervuras bidirecionais espaçadas a cada 48 cm, como mostra a Figura 1. Os parâmetros físicos do material concreto armado foram estimados em 23800 MPa para o módulo de elasticidade longitudinal (E), 9917 MPa para módulo de elasticidade transversal (G) e 0,20 para o coeficiente de Poisson (ν). Para o carregamento, foi considerado uma carga permanente de 3,50 kN/m² e uma carga variável de 2,00 kN/m² uniformemente distribuído na superfície da laje.

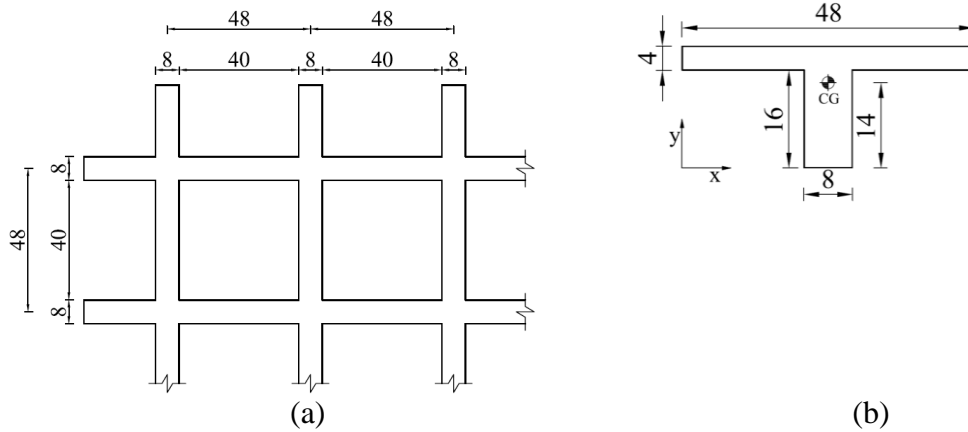


Figura 1 - Detalhamento da laje nervurada (a) e seção transversal da nervura (b) – unidades em cm.

Para o emprego da analogia de grelha as propriedades geométricas das barras que a compõem devem ser previamente definidas. Desse modo, a partir da seção transversal da nervura, calculou-se o momento de inércia à flexão e o momento de inércia à torção, para atribuir estas características às barras da grelha. Para a seção transversal em estudo, os valores calculados resultaram em 10667 cm^4 para o momento de inércia à flexão e 48213 cm^4 para o momento de inércia à torção.

No presente estudo foram implementados três modelos de lajes nervuradas, com relações entre lados (L_x/L_y) de 1, 1,5 e 2, sendo que para cada uma das relações foram adotados cinco diferentes vínculos de bordas, como mostra a Figura 2.

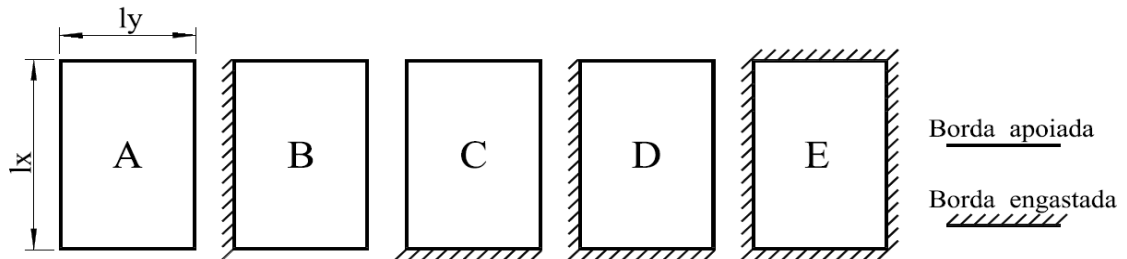
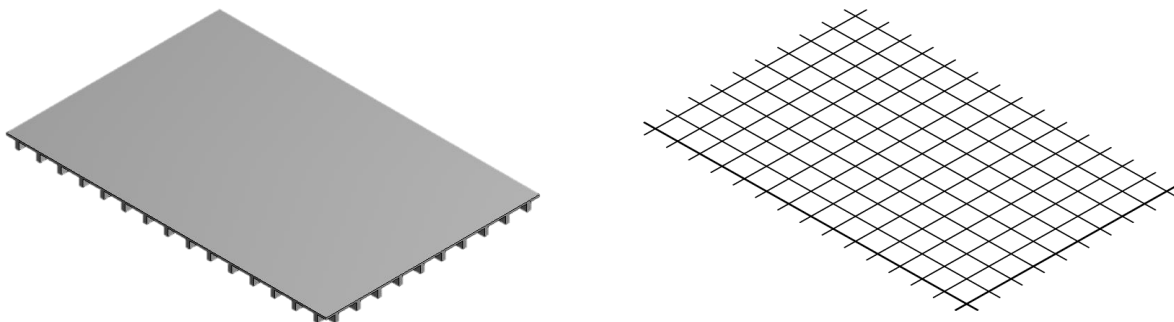


Figura 2 - Modelos das lajes.

As diferentes configurações de lajes foram analisadas pelo Método dos Elementos Finitos com a utilização do *software ANSYS*, comparando modelos de lajes tridimensionais compostas por elementos sólidos, conforme Figura 3(a), com lajes discretizadas em elementos de barras, como mostra a Figura 3(b). Para a análise do modelo tridimensional foi adotado o elemento SOLID186, indicado na Figura 4(a), que apresenta vinte nós com três graus de liberdade por nó. Para a analogia de grelha, foi empregado o elemento de barra BEAM188, que possui dois nós com seis graus de liberdade por nó, apresentado na Figura 4(b).



(a) (b)
 Figura 3 – Modelagem da laje por elemento sólido (a) e por elemento de barra (b).

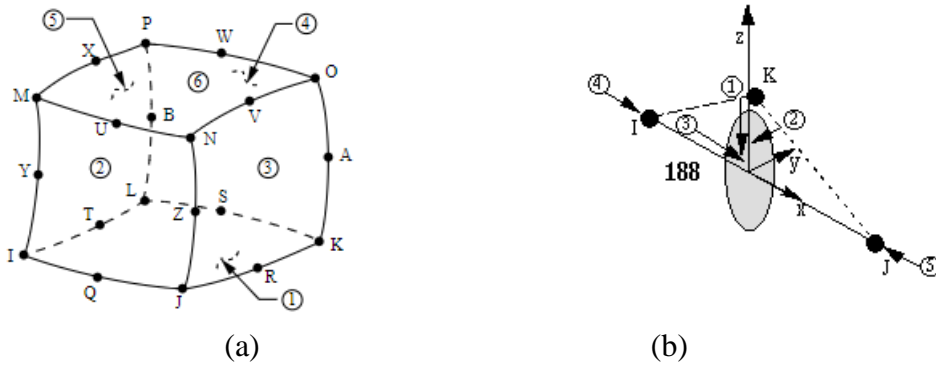


Figura 4 - Elemento SOLID186 (a) e elemento BEAM188 (b).

A partir da implementação no *software ANSYS*, obteve-se momentos fletores e deslocamentos máximos para cada configuração de laje. Para o modelo em elemento sólido, os valores dos momentos máximos foram determinados através das máximas tensões superiores e inferiores, conforme Equação (1).

$$M = \frac{I}{2} \left(\frac{\sigma_s}{y_1} + \frac{\sigma_i}{y_2} \right) \quad (1)$$

onde:

M = momento fletor máximo

I = momento de inércia à flexão da nervura

σ_s = tensão máxima na face superior

σ_i = tensão máxima na face inferior

y_1 = distância da face superior ao centro de gravidade

y_2 = distância da face inferior ao centro de gravidade

A aplicação do método da analogia de grelha requer a atribuição de valores das propriedades da seção transversal, em especial os momentos de inércia à torção e à flexão equivalente e capaz de representar fisicamente o comportamento das nervuras da laje. Sendo assim, foram propostas duas alternativas para ajuste do valor do momento de inércia à torção: No primeiro, o valor do momento de inércia à torção para a barra da grelha é obtido multiplicando o momento de inércia à torção da nervura pelo parâmetro de ajuste α . Na segunda alternativa, o valor do momento de inércia à torção é obtido multiplicando o momento de inércia à flexão da nervura pelo parâmetro de ajuste β , como expressa as Equações (2) e (3).

$$I_t' = \alpha I_t \quad (2)$$

$$I_t' = \beta I_f \quad (3)$$

onde:

I_t' = momento de inércia à torção ajustado para a barra da grelha;

α = parâmetro geométrico de ajuste;

I_t = momento de inércia à torção da nervura;

β = parâmetro geométrico de ajuste;

I_f = momento de inércia à flexão da nervura.

Para a determinação destes parâmetros, os resultados obtidos a partir do elemento sólido foram adotados como referência para análise, e comparados aos gerados a partir da analogia de grelha. A análise foi iniciada pela laje com relação L_x/L_y igual a 2, com as bordas simplesmente apoiadas, adotando-se a inércia à torção como o dobro da inércia à flexão, conforme proposto por Montoya (1973). Posteriormente esse parâmetro foi sendo ajustado até obter-se resultados semelhantes e aceitáveis entre o modelo de barras pela analogia de grelha e o modelo tridimensional em elemento sólido. Os parâmetros obtidos a partir dessa configuração de laje foram aplicados nos demais modelos propostos, possibilitando assim a determinação dos valores dos parâmetros α e β .

3. ANÁLISE DOS RESULTADOS

A partir dos resultados definiu-se que o parâmetro de ajuste α representa 16% do valor do momento de inércia à torção da seção transversal da nervura da laje. Alternativamente foi estabelecido que β deve ajustar em 72% do momento de inércia a flexão da mesma seção. Esses valores atribuídos aos parâmetros mostraram-se apropriados para todas as relações entre lados e vinculações analisadas.

Os valores obtidos com a aplicação dos parâmetros $\alpha=0,16$ e $\beta=0,72$ estão apresentados nas Tabelas 1, 2 e 3, conforme as diferentes relações L_x/L_y analisadas. Os valores extraídos para momento fletor máximo, apresentados em kN.m, foram considerados a cada 48 cm.

Tabela 1 - Valores de momentos fletores (kN.m) e deslocamentos (mm) para laje com relação $L_x/L_y=2$.

			Elemento		Diferença
			Sólido	Barra	
Modelo	A	Momento fletor	7,49	7,62	1,74%
		Deslocamento	7,14	7,13	0,12%
	B	Momento fletor	6,93	7,1	2,39%
		Deslocamento	6,61	6,66	0,76%
	C	Momento fletor	4,46	4,55	1,91%
		Deslocamento	3,16	3,14	0,89%
	D	Momento fletor	4,31	4,46	3,38%
		Deslocamento	3,09	3,08	0,18%
	E	Momento fletor	2,58	2,62	1,60%
		Deslocamento	1,51	1,47	3,04%

Tabela 2 - Valores de momentos fletores (kN.m) e deslocamentos (mm) para laje com relação $L_x/L_y=1,5$.

			Elemento		Diferença
			Sólido	Barra	
Modelo	A	Momento fletor	6,28	6,55	4,33%
		Deslocamento	6,08	6,15	1,17%
	B	Momento fletor	5,12	5,38	5,05%
		Deslocamento	4,99	5,09	1,89%
	C	Momento fletor	4,17	4,35	4,21%
		Deslocamento	3,01	3,01	0,27%
	D	Momento fletor	3,75	3,97	5,89%
		Deslocamento	2,73	2,76	1,08%
	E	Momento fletor	2,29	2,41	5,18%
		Deslocamento	1,37	1,36	1,44%

Tabela 3 - Resultados de momentos fletores (kN.m) e deslocamentos (mm) para laje com relação $L_x/L_y=1$.

			Elemento		Diferença
			Sólido	Barra	
Modelo	A	Momento fletor	3,71	3,64	1,97%
		Deslocamento	3,48	3,51	0,80%
	B	Momento fletor	2,99	3,13	4,54%
		Deslocamento	2,19	2,21	0,53%
	C	Momento fletor	2,99	3,13	4,54%
		Deslocamento	2,19	2,21	0,53%
	D	Momento fletor	2,27	2,26	0,27%
		Deslocamento	1,60	1,62	0,71%
	E	Momento fletor	1,39	1,35	2,65%
		Deslocamento	0,83	0,80	3,83%

4. CONCLUSÕES

Para análise estrutural de lajes, pelo método da analogia de grelha, usualmente o momento de inércia à torção aplicado à barra é estabelecido como o dobro do valor do momento de inércia a flexão. Verifica-se que os estudos que recomendam adotar essa relação referem-se principalmente à análise de lajes maciças, sendo que poucas pesquisas existem para lajes nervuradas. Nesse contexto, para aplicação do método da analogia de grelha para lajes nervuradas bidirecionais, a determinação de parâmetros de ajuste do momento de inércia à torção mostra-se pertinente.

Portanto, a partir deste estudo, recomenda-se atribuir para o momento de inércia à torção das barras da grelha, o valor de 16% do momento de inércia à torção, obtido a partir da seção transversal da nervura da laje, ou alternativamente o valor de 72% do momento de inércia à flexão da mesma seção.

A aplicação desses parâmetros apresentou um padrão de comportamento para análise dos momentos fletores e deslocamentos máximos de todos os modelos analisados. A diferença entre os resultados obtidos com o elemento sólido e com o elemento de barra pode ser considerado

aceitável, validando assim o propósito do estudo. Ressalta-se ainda que a intenção deste estudo não é estabelecer um padrão absoluto, mas sim fornecer alternativas de cálculo ao projetista.

O presente estudo avaliou o comportamento de lajes nervuradas bidirecionais através de métodos de análise computacional. Como prosseguimento deste estudo sugere-se executar modelos experimentais para validação dos valores propostos para α e β , além de considerar outras dimensões de nervuras e a consideração da influência de vigas de borda.

AGRADECIMENTOS

PROPESP – Pró-Reitoria de Pesquisa, Inovação e Pós-graduação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-Grandense - IFSUL.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSYS Workbench. Version 13.1. [S.l.]: Ansys Inc., 2013.

ARAÚJO, J. M. Curso de Concreto Armado. 4 v. Rio Grande: Editora Dunas, 4. ed., 2014.

ABNT. Associação Brasileira de Normas Técnicas. Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. NBR 6118. Rio de Janeiro, 2014.

COELHO, J.A. Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

LOTTI, R.S; MACHADO, A.W; MAZZIEIRO, E.T; JUNIOR, J.L. Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos. R Dental Press Ortodon Ortop Facial, Maringá, v. 11, n. 2, p. 35-43, 2006.

MONTOYA, P.J.; GARCIA, A.M.; MORAN, F.C. Hormigón armado. Barcelona: Editora Gustavo Gili, 2000.

STRAMANDINOLI, J.S.B. Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.